Феномените на комплетност и некомплетност во формалната логика

Светски ден на логиката 2024

Данко Илиќ

13. јануари 2024
Филозофското друштво на Македонија и
Институт за филозофија, УКИМ

Почетоците на математичката логика

1847	Бул ја сведува логиката на алгебра
1870-1874	Кантор работи на дефиницијата на ирационални броеви, потоа на теоријата на множества
1884	Фреге го дефинира првиот формален систем за докажување
1889	Пеано пронаоѓа аксиоми за аритметиката
1904-1908	Цермело пронаоѓа аксиоми за теоријата на множества
1910-1913	Расел и Вајтхед ја објавуваат *Principia Mathematica*
1920-	Теорија на докази на Хилберт, Интуиционизмот на Брауер

Предикатно сметање

Логички сврзници и формули

Исказно сметање

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Квантификатори

$(\forall x \in D)\ p(x)$ значи $p(i_0) \wedge p(i_1) \wedge p(i_2) \wedge \cdots$ за сите $i_k \in D$

$(\exists x \in D)\ p(x)$ значи $p(i_0) \vee p(i_1) \vee p(i_2) \vee \cdots$ за сите $i_k \in D$

Предикатно сметање

Примери на логички формули

Пример

$p \to p \vee q \qquad ((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)) \qquad p \vee \neg p$

Пример

$\forall x\big(x \in \mathbb{N} \to (\exists y(x = 2y)) \vee (\exists y(x = 2y + 1))\big)$

Пример (Парадоксот на пијаницата)

$\exists x\big(p(x) \to \forall x\ p(x)\big)$

Пример

$p \wedge \neg p$

Теоријата на докази „на Хилберт“

1900 Вториот проблем на Хилберт

Да се најде директен доказ дека аксиомите на аритметиката не се противречни, поточно дека, користејќи ги аксиомите, во конечен број на чекори не може да се докаже $p \wedge \neg p$.

1928 Книгата на Хилберт и Акерман

- Проблемот на комплетност
- Entscheidungsproblem (проблемот на одлучување)

Entscheidungsproblem

Проблемот на одлучување

Да се пронајде алгоритам што, за секоја логичка формула, може да одлучи дали формулата е валидна или не.

- Хилберт и Акерман се оптимисти, бидејќи таков алгоритам постои за одредени теории како Аритметиката на Пресбургер
- $p \vee \neg p$ е тавтологија, но тоа не ни овозможува да одлучиме **кое** од p или $\neg p$ важи
  - Истиот проблем го имаме со $\exists x\ p(x)$, причината за раздорот меѓу Брауер и Хилберт
- Во 1936 Тјуринг и Черч (независно еден од друг) покажуваат дека таков алгоритам не постои
  - За доказот им е потребно да го формализираат поимот алгоритам, што го иницира развојот на информатиката

Проблемот на комплетност

> *Дали сите валидни логички формули можат да се докажат во формалниот систем на докажување на класичната предикатна логика?*

Решението на проблемот би овозможило да се воспостави врска помеѓу

- светот на идеите, и
- синтаксата на доказите

и би покажало дека синтаксата на доказите е соодветна за својата намена.

Светот на идеите

Дефиниција ($\models p$)

Логичката формула p е **валидна** ($\models p$) ако е **вистинита во сите модели**.

„Сите модели“ ги подразбира сите можни светови, знајни и незнајни, при интерпретација на квантификаторите $(\forall x \in D)p(x)$, $(\exists x \in D)p(x)$ и исказите со параметри $p(d)$.

Такви модели може да има бесконечно многу.

Синтаксата на доказите

Дефиниција ($T \vdash p$)

Логичката формула p е **докажлива** ($\vdash p$) ако е постои конечно дрво на докажување за p кое што користи конечен број на аксиоми од T.

Интуитивна илустрација:

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Теоремата за комплетност

Теорема (Гедел 1929)

$\vdash p$ *ако и само ако* $\vDash p$

Доказ (главна идеја).

Се користи *нормалната форма на Сколем*: секоја формула p може да се трансформира во формула p^S, која што не мора да е еквивалента со p, но која што има модел ако и само ако p има модел.

Пример: $\left(\forall x \exists y \forall z\ p(x, y, z)\right)^s = p(x, f(x), z)$

$\square$

Теоремата за комплетност

Епилог

- Проблемот на комплетност е решен, но не на начин потполно задоволителент за Хилберт и Акерман, кои што повеќе би сакале да ја добијат комплетноста преку алгоритам за одлучување
- Кривин во 1996 покажува дека од доказот на Гедел може да се екстрахира алгоритам (но не алгоритам за одлучување)

Аксиоми за Аритметиката

Аксиомите за следбеник, собирање и множење

$$x' \neq 0 \qquad x' = y' \to x = y$$
$$x + 0 = x \qquad x + y' = (x + y)'$$
$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot y' = x \cdot y + x$$

Аритметиката на Робинсон (**Q**)

$$\exists z(x + z' = y) \ \vee \ x = y \ \vee \ \exists z(y + z' = x)$$

Аритметиката на Пеано (**PA**)

$$p(0) \wedge \forall y\big(p(y) \to p(y')\big) \to \forall x \ p(x)$$

Теоремите на некомплетност на Гедел (1931)

Нека T биде аксиоматизирана теорија која го содржи Q.

Теорема (Прва теорема на некомплетност)

Ако T е конзистентна, тогаш постои логичка формула p, таква што $T \nvdash p$ *и* $T \nvdash \neg p$.

Теорема (Втора теорема на некомплетност)

Ако T е конзистентна, тогаш T не може да ја докаже својата сопствена конзистентност, поточно $T \nvdash Con_T$.

Последица

Ако PA е конзистентна, тогаш $PA \nvdash Con_{PA}$.

Има ли надеж да се комплетира системот на аксиоми?

Теоремите на некомплетност на Гедел (1931)

Кодирање

Исказот и доказот ја користат техниката на **кодирање**. Формулата Con_T е следната формула:

$$\neg\exists y(\mathrm{Prf}_T(y, \dot{\bot})),$$

каде што $\mathrm{Prf}_T(y, z)$ значи дека синтаксното дрво кодирано со y ја докажува формулата кодирана со z.

Теоремата на Кирби и Парис (1982)

Дефиниција (Претставување на m со основа n)

Преку пример за $m = 266$, $n = 2$:

$$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$$

$$266 = 2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

$$266 = 2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

Теоремата на Кирби и Парис (1982)

Дефиниција (Низата на Гудштајн)

Преку пример за $m_0 = 266$, каде во секој следен чекор ја зголемуваме основата за 1, па од целиот број одземаме 1:

$$266_0 = 2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

$$266_1 = 3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 2 \qquad \sim 10^{38}$$

$$266_2 = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1 \qquad \sim 10^{616}$$

$$266_3 = 5^{5^{5^1+1}} + 5^{5^1+1} \qquad \sim 10^{10000}$$

$$\ldots$$

Теоремата на Кирби и Парис (1982)

Теорема (Гудштајн 1944)

$\forall m \exists k (m_k = 0)$

Теорема (Кирби-Парис 1982)

$PA \nvdash \forall m \exists k (m_k = 0)$

Првиот „природен“ пример на аритметичка формула која што не може да се докаже во Аритметиката на Пеано.

Дали аритметиката на Пеано е конзистентна?

- Постојат повеќе докази
  - Кои што нужно користат теории посилни од PA
- Од друга страна, ако некој пронајде контрадикција во PA, тоа нема да биде во контрадикција со теоремите за некомплетност

Модифицираната програма „на Хилберт“

Самиот Гедел предлага доказ за конзистентоста на Аритметиката, преку неговата „Дијалектика“-интерпретација:

- *In what sense is intuitionistic logic constructive* (1941)
- *On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint* (1958)
- *On an extension of finitary mathematics which has not yet been used* (1972)
- Интерпретација која што почнува да се користи од 2000 г. во применетата теорија на докази

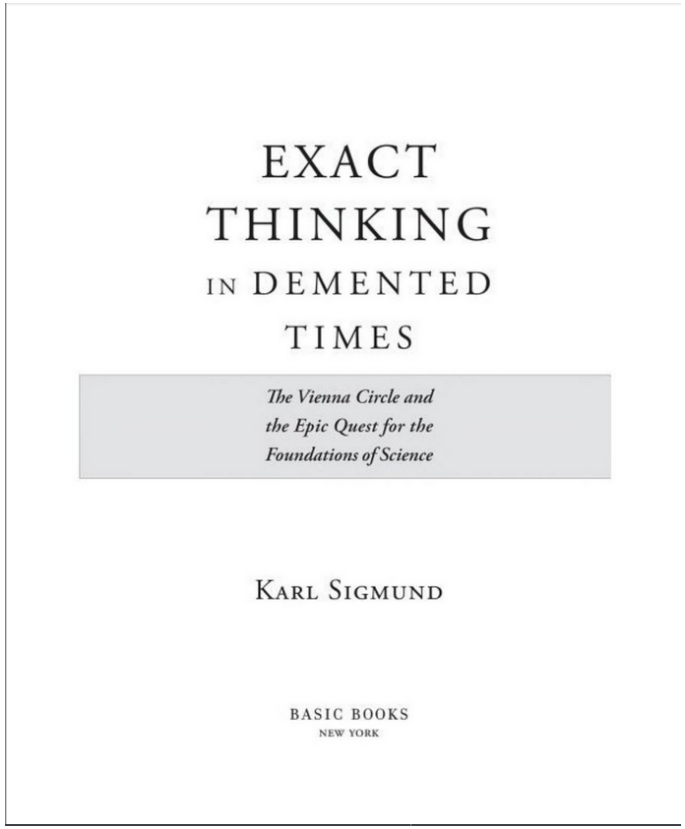
Перспективи

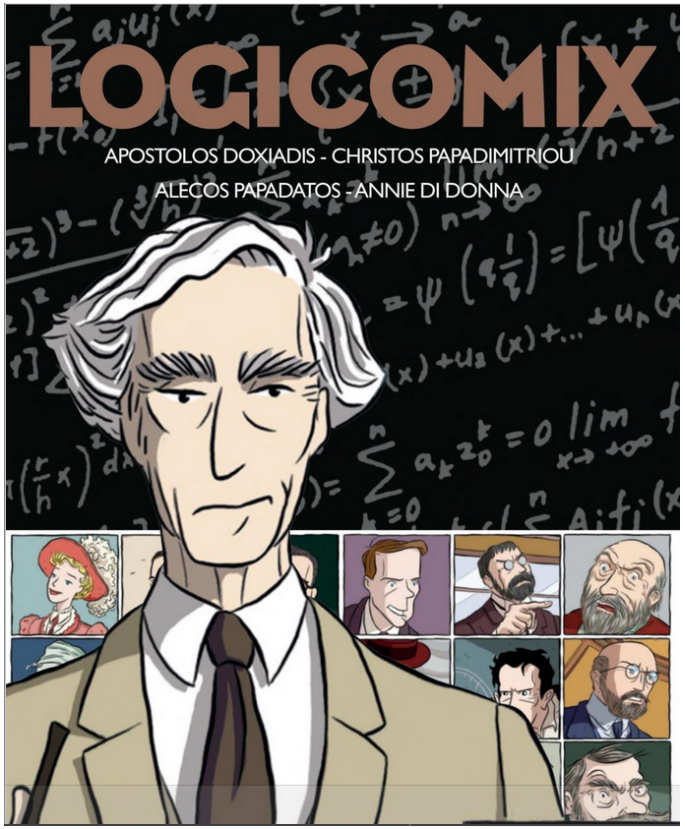
- Прашањата на комплетност/некомплетност во други контексти:
  - интуиционистичка логика
  - алтернативни дефиниции на вистина
  - проблемот на средношколски идентитети
- Нова аритметичка хиерархија (2019)
- Авто-интерпретери

Литература

Историја

- *Exact Thinking in Demented Times*. Karl Sigmund (2017)
- *Logicomix*. Doxiadis, Papadimitriou (2008)

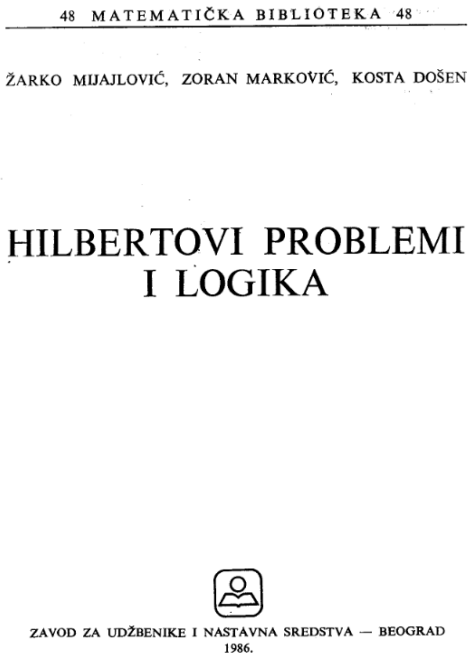




Литература

Математика

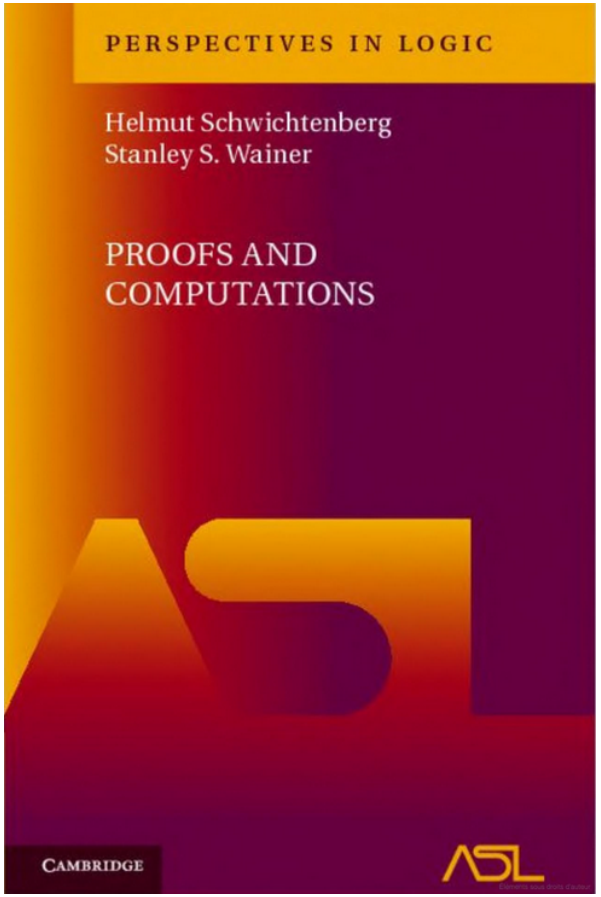
- *Хилбертови проблеми и логика*. Мијајловиќ, Марковиќ, Дошен (1986)
- *Proofs and Computations*. Schwichtenberg, Wainer (2011)


48 MATEMATIČKA BIBLIOTEKA 48

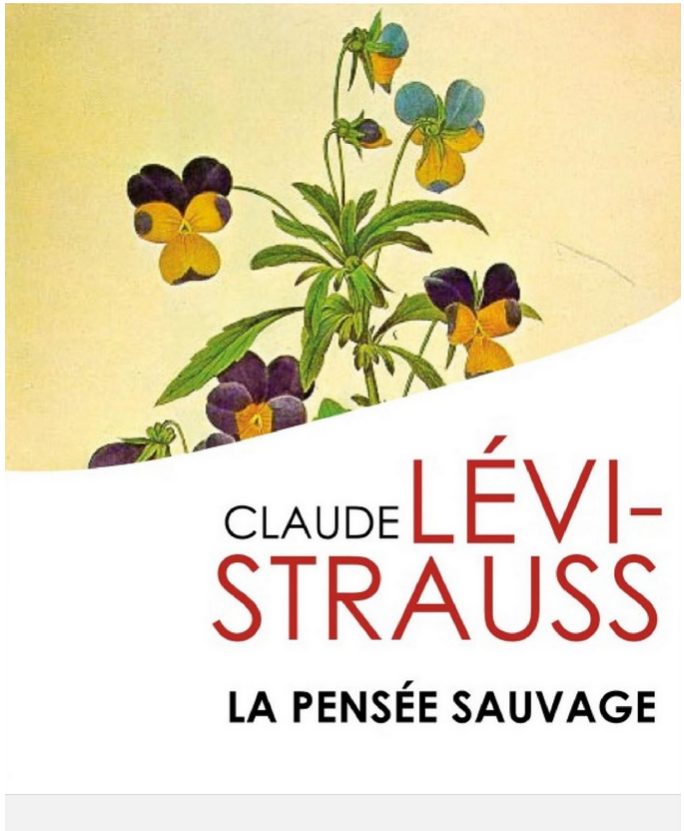
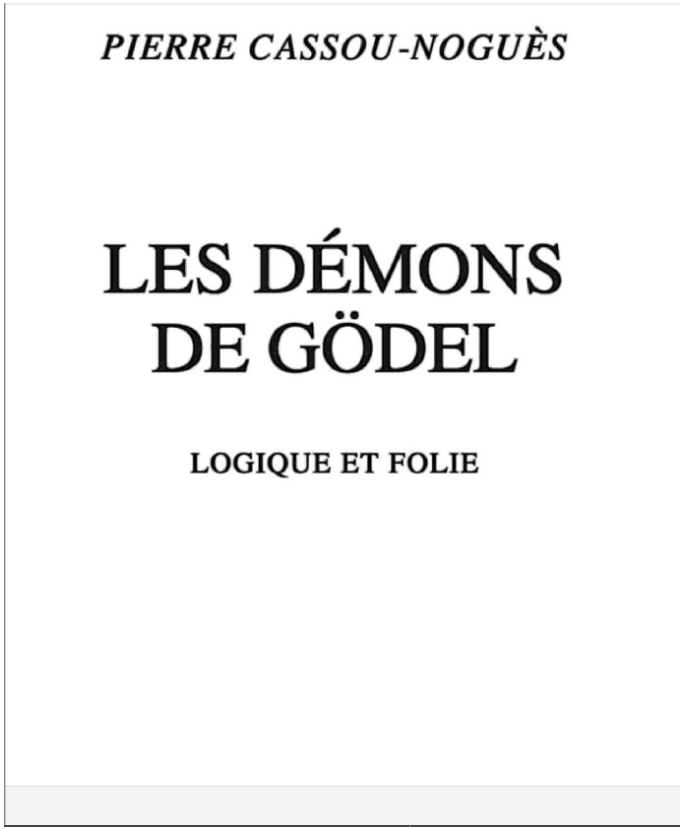
ŽARKO MIJAJLOVIĆ, ZORAN MARKOVIĆ, KOSTA DOŠEN

HILBERTOVI PROBLEMI I LOGIKA

ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA — BEOGRAD
1986.



Литература

Антропологија, Психологија

- *La pensée sauvage*. Lévi-Strauss (1962)
- *Les démons de Gödel*. Pierre Cassou-Noguès (2007)